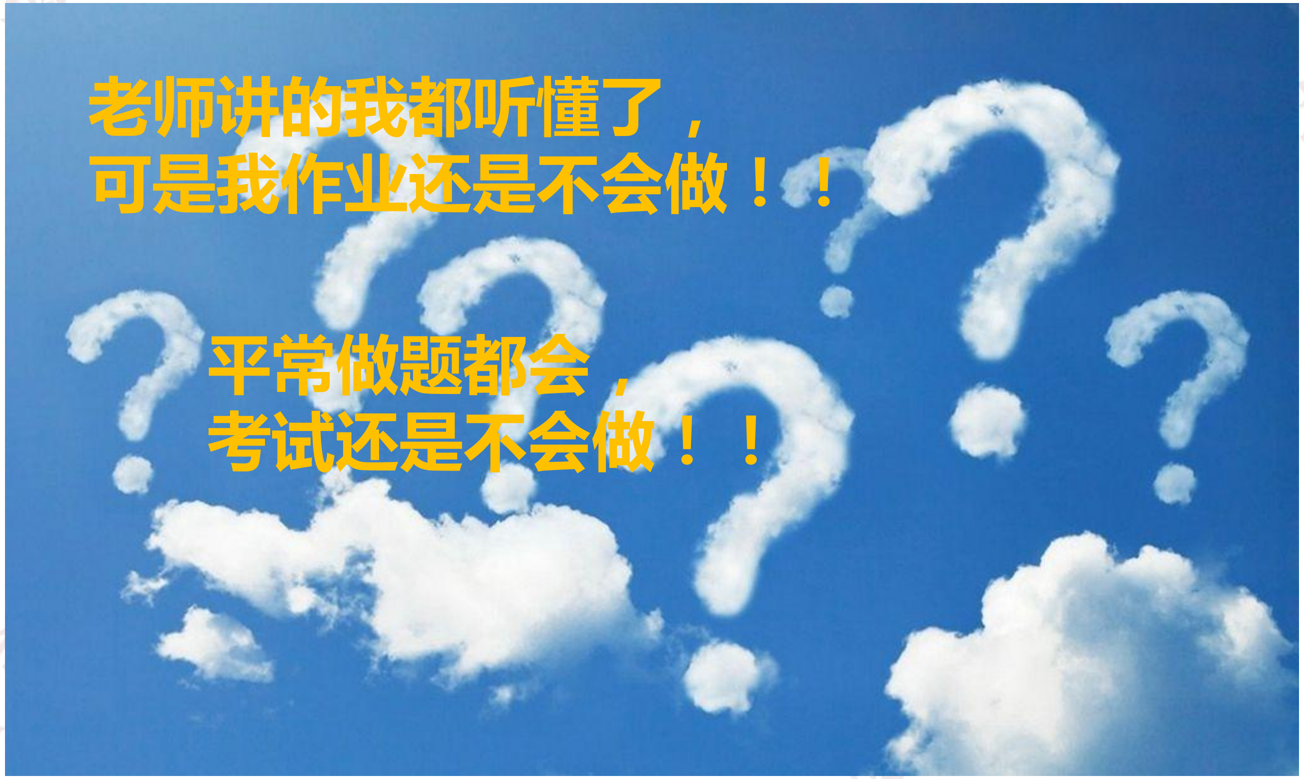
一题多解多变

分享人：邱崇

那些年我们的困惑



源于生活

老师讲的

中考

作业

月考

为啥呢？？？

我们喜欢捏软柿子

写作业只挑会做的，
难的不愿意动脑子

大多数人喜欢“安分”，解决“温饱”不思“小康”

会做了就行了，从不去考虑更好的更多的

不喜欢收拾屋子，乱糟糟的，找起来费劲，用起来难

不擅长归纳总结，举一反一尚不能，
何来反三

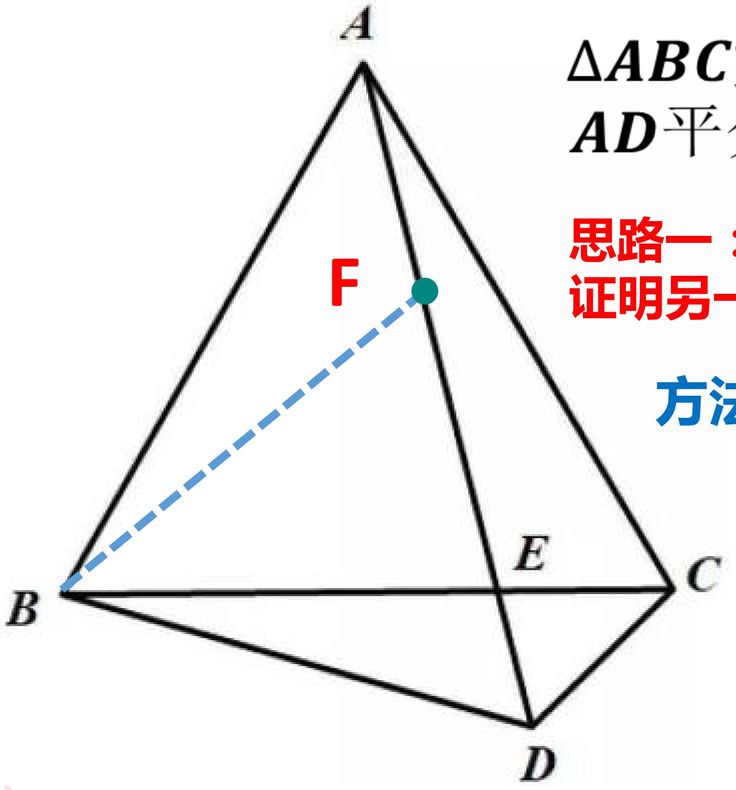
解决策略

台下十年功，台上一分钟，平时多思多变

一题多解扩思路（一百种方法削它）

一题多变抓七寸（换了马夹也认识）

举个栗子



ΔABC为等边三角形，$\angle BDC=120°$，AD平分$\angle BDC$，求证$BD+CD=AD$

思路一：将AD拆成两部分，一部分等于BD或CD，证明另一部分等于CD或BD

方法一：在AD上取DF=BD，证明AF=CD

证明 $AF=CD \Leftrightarrow \triangle AFB \cong \triangle CDB$

$\because \triangle ADC$为等边三角形 $\therefore AB=CB$ (S)

$\because \angle BDC=120°$, AD平分$\angle BDC$

$\therefore \angle BDF=60°$ $\because BD=DF$

$\therefore \triangle BDF$为等边三角形

$\therefore BD=BF$ (S)

$\angle ABF+\angle FBC=\angle CBD+\angle FBC=60°$

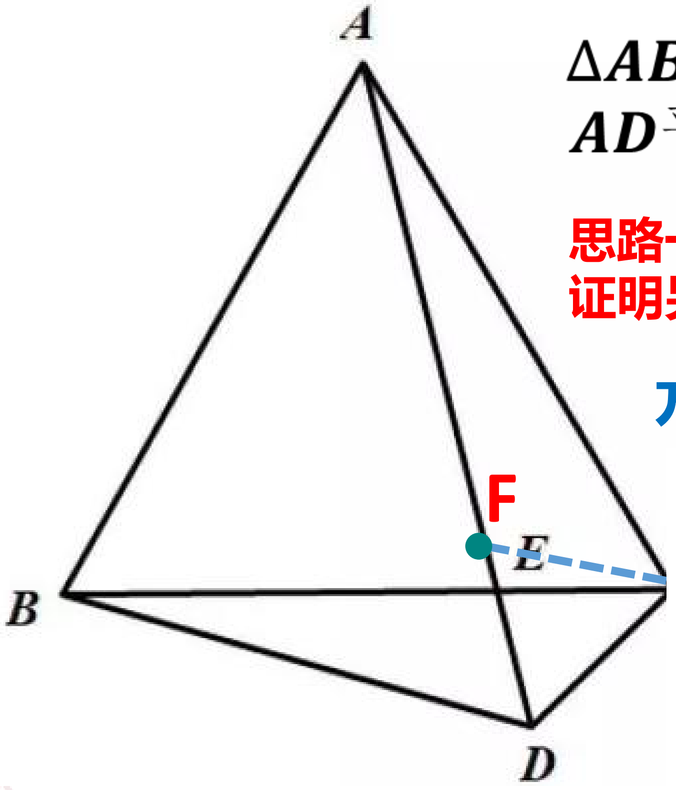
$\therefore \angle ABF=\angle CBD$ (A)

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle CDB$ (SAS)

$\therefore AF=CD$ $\therefore BD+CD=DF+AF=AD$

证明三角形全等有三种方法，SAS，ASA，SSA

举个栗子



ΔABC为等边三角形，$\angle BDC=120°$，AD平分$\angle BDC$，求证$BD+CD=AD$

思路一：将AD拆成两部分，一部分等于BD或CD，证明另一部分等于CD或BD

方法二：在AD上取DF=CD，证明AF=BD

证明 $AF=BD \Leftarrow \triangle AFC \cong \triangle BDC$

$\because \triangle ABC$为等边三角形 $\therefore AC=BC$ (S)

$\angle ACB=60°$

$\because \angle BDC=120°$，AD平分$\angle BDC$

$\therefore \angle ADB=60°=\angle ADC$

又$\because \angle BED=\angle AEC$（对顶角）

$\therefore \angle CBD=\angle CAF$ (A)

又$\because DF=CD$ $\therefore \triangle CFD$为等边三角形

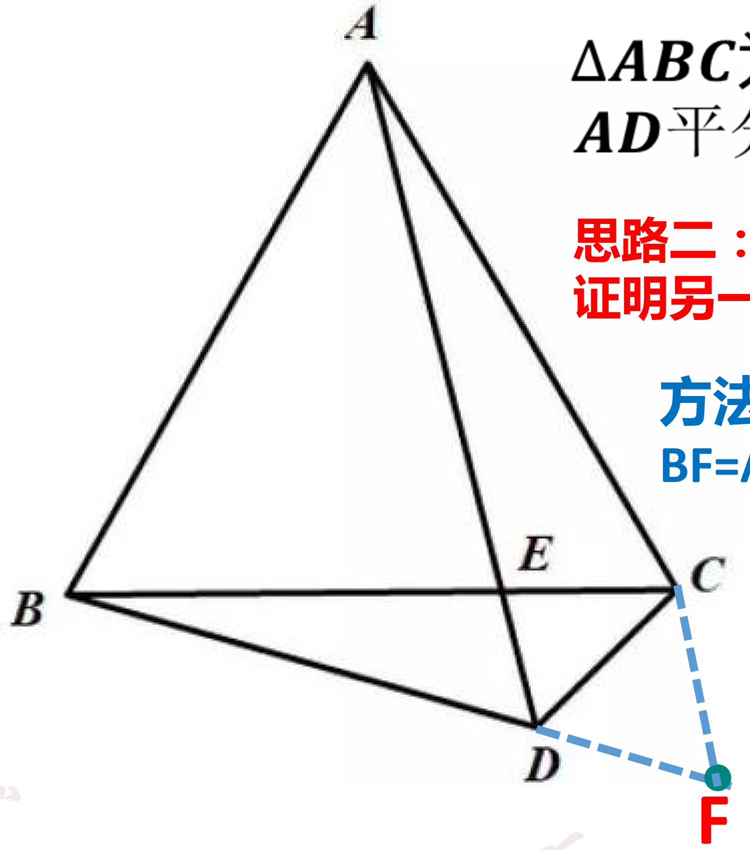
$\therefore \angle CFD=60°$ $\therefore \angle AFC=120°$

$\therefore \angle AFC=\angle BDC$ (A)

$\therefore \triangle AFC \cong \triangle BDC$ (AAS)

$\therefore AF=BD$ $\therefore AD=AF+DF=BD+CD$

举个栗子



ΔABC为等边三角形，$\angle BDC=120°$，AD平分$\angle BDC$，求证$BD+CD=AD$

思路二：将AD拆成两部分，一部分等于BD或CD，证明另一部分等于CD或BD

方法三：在BD延长线上取DF=CD，证明BF=AD

证明 $BF=AD \Leftrightarrow \triangle BFC \cong \triangle ADC$

$\because \triangle ADC$为等边三角形，$\therefore BC=AC$ (S)

$\angle ACB=60°$

$\because \angle BDC=120°$，AD平分$\angle BDC$

$\therefore \angle CDF=60°$ 又$\because CD=DF$

$\therefore \triangle CDF$为等边三角形

$\therefore \angle DCF=60°$ $CD=CF$ (S)

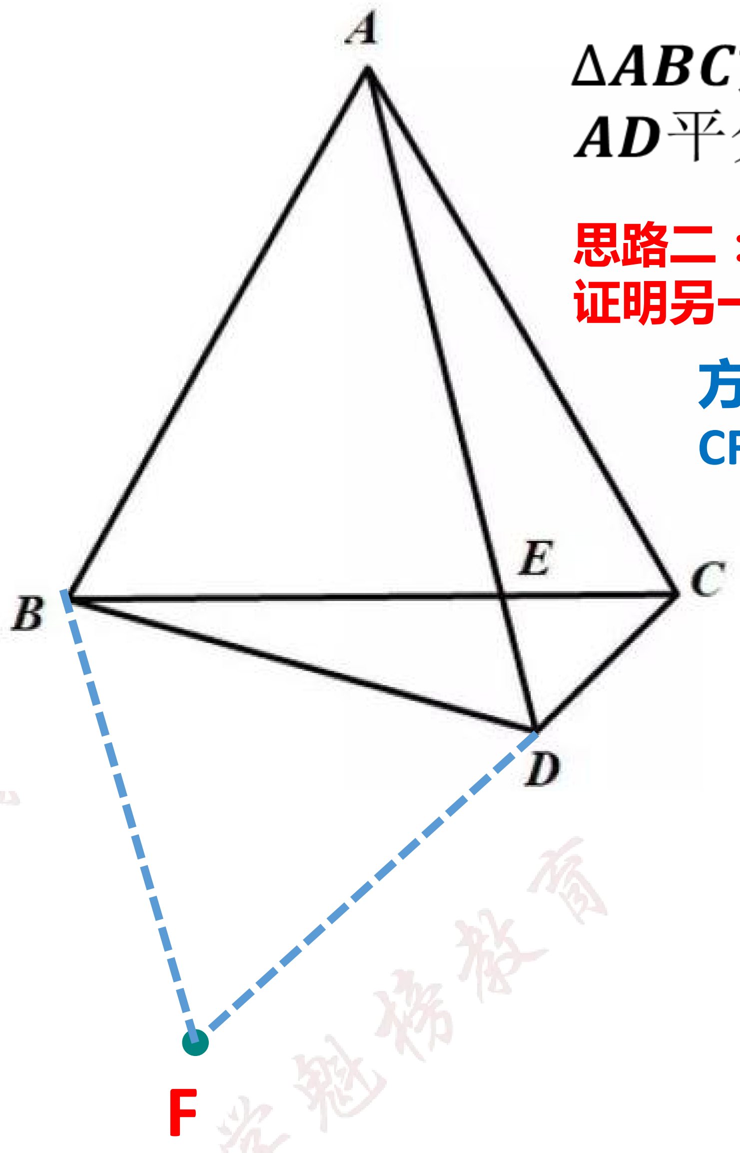
$\therefore \angle ACB+\angle BCD=\angle DCF+\angle BCD$

即$\angle ACD=\angle BCF$ (A)

$\therefore \triangle BFC \cong \triangle ADC$ (SAS)

$\therefore AD=BF=BD+DF=BD+CD$

举个栗子



ΔABC为等边三角形，$\angle BDC=120°$，AD平分$\angle BDC$，求证$BD+CD=AD$

思路二：将AD拆成两部分，一部分等于BD或CD，证明另一部分等于CD或BD

方法四：在CD延长线上取DF=BD，证明CF=AD

证明$CF=AD \Leftrightarrow \Delta ABD \cong \Delta CBF$

$\because \angle BDC=120°$ $\therefore \angle BDF=60°$

$\because DF=BD$ $\therefore \Delta BDF$为等边三角形

$\therefore BD=BF(S)$ $\angle DBF=60°$

$\because \Delta ABC$为等边三角形

$\therefore AB=BC(S)$ $\angle ABC=60°$

$\therefore \angle ABC+\angle CBD=\angle DBF+\angle CBD$

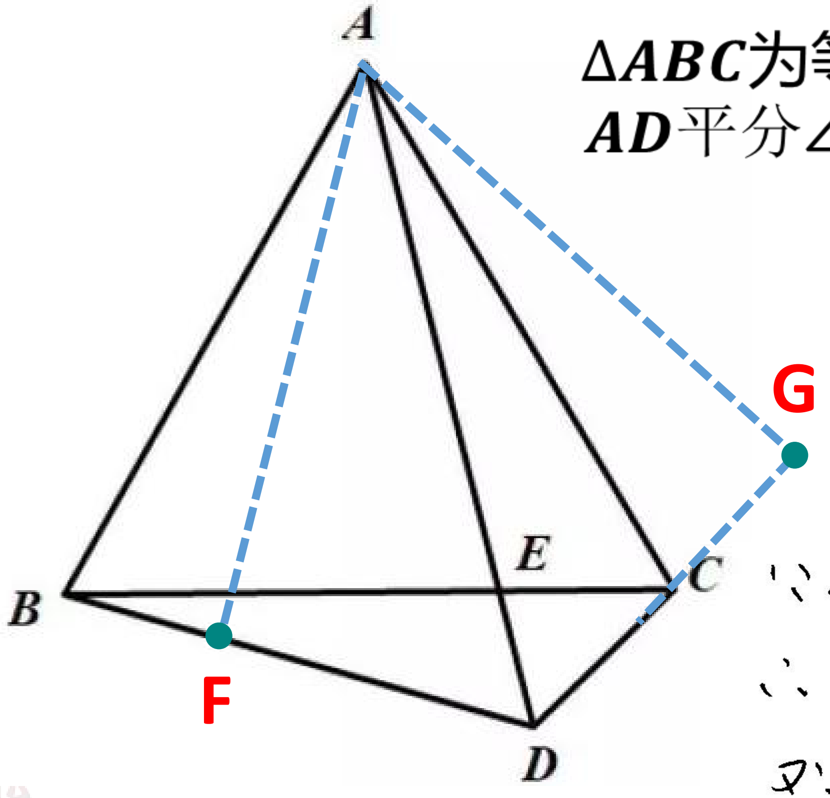
$\therefore \angle ABD=\angle CBF(A)$

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta CBF(SAS)$

$\therefore AD=CF=CD+DF=CD+BD$

也可以在DC的延长线上取

举个栗子



ΔABC为等边三角形，$\angle BDC=120°$，AD平分$\angle BDC$，求证$BD+CD=AD$

思路三：利用直角三角形中30度角所对的直角边长为斜边的一半

方法五：过A分别作BD和CD的垂线AF和AG

$\because \angle BDC=120°$，AD平分$\angle BDC$

$\therefore \angle ADF=\angle ADG=60°$

又$\because \angle AFD=\angle AGD=90°$

AD为公共边

$\therefore \triangle AFD\cong\triangle AGD(AAS)$

$\therefore AF=AG$，$FD=DG$

又$\because AB=AC$，$\angle AFB=\angle AGC=90°$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ACG$

$\therefore BF=CG$

$\therefore BD+CD=BF+FD+CD=CG+FD+CD$

$=2FD$

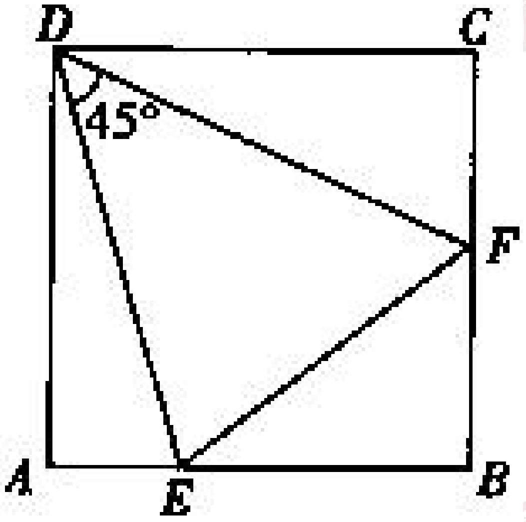
在$Rt\triangle AFD$中，$\angle FAD=90°-60°=30°$

$\therefore AD=2FD$　$\therefore AD=BD+CD$

变式（等价）

（2017 吉林长春，21）如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为直线 AB 上的动点（不与 A，B 重合），作射线 DE，并绕点 D 逆时针旋转 45°，交直线 BC 于点 F，连接 EF.

探究：当点 E 在边 AB 上时，求证：$EF=AE+CF$.



证明：如图 1，延长 BA 到 G，使 $AG=CF$，连接 DG，

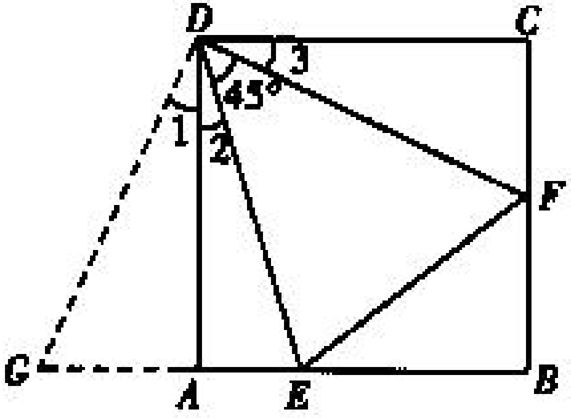


图 1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore DA=DC$，$\angle DAG=\angle DCF=90°$，

又 $AG=CF$，

$\therefore \triangle DAG\cong\triangle DCF$，

$\therefore \angle 1=\angle 3$，$DG=DF$，

$\because \angle ADC=90°$，$\angle EDF=45°$，

$\therefore \angle EDG=\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 2=45°=\angle EDF$.

$\because DE=DE$，

$\therefore \triangle GDE\cong\triangle FDE$，

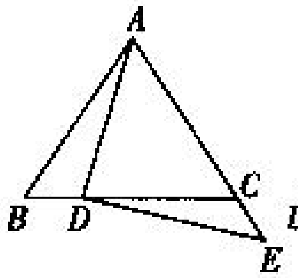
$\therefore EF=EG=AE+AG=AE+CF$.

变式（递进）

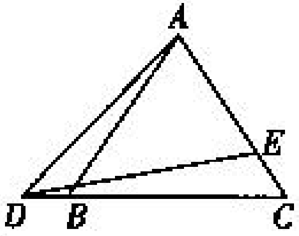
（2016黑龙江龙东，26）在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=60°$，点E为直线AC上一点，点D为直线BC上一点，且$DA=DE$.

当点D在线段BC上时，如图①，易证：$BD+AB=AE$；

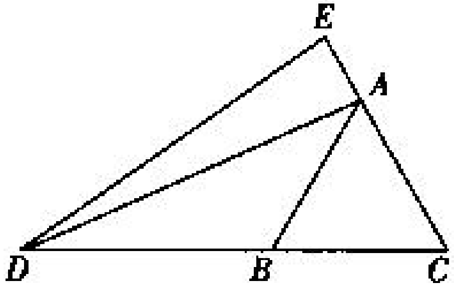
当点D在线段CB的延长线上时，如图②、图③，猜想线段BD，AB和AE之间有怎样的数量关系，写出你的猜想，并选择一种给予证明.



图①



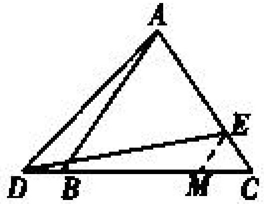
图②



图③

解析　题图②中，结论：$BD+AE=AB$.

证明：作$EM\parallel AB$交BC于M，如图，



$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle ABC=\angle C=\angle BAC=60°$，$AB=BC=AC$，

$\therefore \angle CEM=\angle CAB=60°$，$\angle CME=\angle CBA=60°$，

$\therefore \triangle CME$是等边三角形，

$\therefore CE=CM=EM$，$\angle EMC=60°$，

$\therefore AE=BM$，

$\because DA=DE$，

$\therefore \angle DAE=\angle DEA$，

$\therefore \angle BAC+\angle DAB=\angle C+\angle EDM$，

$\therefore \angle DAB=\angle EDM$，

$\because \angle ABD=180°-\angle ABC=120°$，$\angle EMD=180°-\angle EMC=120°$，

$\therefore \angle ABD=\angle EMD$，

在$\triangle ABD$和$\triangle DME$中，

$$\begin{cases}\angle ABD=\angle EMD,\\ \angle DAB=\angle EDM,\\ AD=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle DME$，

$\therefore DB=EM=CM$，又$AE=BM$，

$\therefore DB+AE=CM+BM=BC=AB$.

考试会做的关键

一题多解

拓宽思维

一题多变

探究性地从命题人角度
分析可能考点

加强归类

找准不变的，应对万变